MATEMATICHE

FASCICOLO SEÇONDO

TEMI D' ARITMETICA

TEMI

D' ARITMETICA

PER USO

Della Studiosa Gioventù

FASCICOLO SECONDO

PISA

Presso Ranieri Prosperi

Tipografo della I. e R. Università

1838.

TEMA SECONDO

Denumerazione, e tre prime operazioni inverse sù i numeri; cioè Sottrazione, Divisione, ed Estrazione delle radici, e segnatamente della radice quadrata e cubica.

§. I.

DENUMERAZIONE.

1. Dopo di avere nel precedente Tema abbastanza parlato della più semplice e naturale operazione aritmetica, cioè della Numerazione, noi vogliamo adesso in questo prendere a considerare la operazione opposta, o, come dicesi, *inversa* alla Numerazione, e che chiameremo *Denumerazione*.

Imaginando d' aver colla Numerazione già formato un numero, e d' averlo poi colla medesima cambiato in un' altro più grande, aggiungendogli delle nuove unità o *ad una*, od *a più* per volta in tutti quei modi, che abbiamo nel precedente Tema insegnati, colla Denumerazione si tratta di disfare o distruggere con de' modi inversi, ossia operando inversamente, sul secondo numero ciò, che si è, o s' imagina d' aver fatto colla Numerazione sul primo, *all' oggetto di vedere qual è questo numero primitivo*.

2. Se un numero si riguarda come formato dall' *aggiungere* delle unità ad *una per volta* ad un' altro numero, è chiaro, che, operando inversamente, il primo di questi numeri si ridurrà al secondo col *togliergli* pure di mano in mano ad *una per volta* le unità che si giudica, o si vuole, ch' esso abbia di soprappiù, pronunciando in quanto alla nomenclatura i medesimi nomi in ordine retrogrado a quelli, che si sanno per la numerazione parlata, e per rapporto alla scrittura, segnando di mano in mano le cifre corrispondenti agli enunciati; ed in ciò appunto consiste la *Denumerazione propriamente detta, parlata e scritta*.

§. II.

Prime tre operazioni inverse sù i numeri; cioè Sottrazione, Divisione, ed Estrazione delle radici, e segnatamemte della radice quadrata e cubica.

1. Quando un numero *proposto scritto* si ri-

guarda come formato dall' aggiungere delle unità a *più per volta* ad un' altro numero, ossia come resultante dall' addizione a questo d' uno o più numeri *dati scritti*, la operazione inversa che và fatta sul primo numero per ridurlo al secondo, togliendogli, o *sottraendogli* cotesti numeri aggiunti, ossia la operazione inversa all' addizione, dicesi *Sottrazione;* e però, come l'Addizione è una numerazione più rapida della numerazione propriamente detta, così la Sottrazione è pure una denumerazione più rapida della denumerazione propriamente detta.

2. Potendosi chiamare *Accrescendo* un numero, che si tratti di far crescere coll' aggiungergli uno o più altri numeri, ed *Accrescitori* questi secondi numeri, noi chiameremo al contrario *Diminuendo* un numero proposto, quando si tratti di farlo diminuire, togliendogli o sottraendogli uno o più altri numeri; e *Diminutori* questi ultimi numeri. Il numero poi, a cui si ridurrà il Diminuendo, dopo avergli sottratti tutti i Diminutori, ossia il numero, che *resterà* dopo la operazione, dirassi *Resto;* e questo resto, nel caso d' un diminutore solo, sarà la *Differenza* tra il diminuendo e cotesto diminutore, oppure l' *Eccesso* del primo sul secondo numero. Posto ciò

Volendo passare a far vedere in ogni caso, come per mezzo de' diminutori si deve operare sul diminuendo, onde scuoprire il resto, noi cominceremo, nel modo stesso, che per la Numerazione abbiamo fatto (Tema primo. §. II. n.° 1.), dal distinguer tre casi, cioè

1.° Quello, in cui avendosi uno o più diminutori, questi siano generalmente disuguali trà loro, e dati di numero, ed inoltre ciascuno sia di grandezza assegnata; ed in questo caso appunto consisterà *la Sottrazione propriamente detta*.

2.° Quello, in cui i diminutori, dovendo essere tutti uguali tra loro e dati di numero, non sono di grandezza assegnata; ma però si esige, ch' essi siano i più grandi possibili, acciocchè, venendo sottratti dal diminuendo, lascino *il più piccolo resto possibile*, per la qual condizione, oltre ad un tal resto, rimarrà determinata per mezzo della operazione stessa anche la conveniente grandezza di uno, ed in conseguenza di tutti cotesti diminutori; ed in questo caso particolare la Sottrazione si chiamerà *Divisione*.

3.° Quello, in cui i diminutori dovendo esser pure uguali tra loro, non si assegna, nè il loro numero, nè la loro grandezza; ma però si esige, che riescano precisamente tanti quante unità conterrà uno di essi, oppure la di lui seconda, terza, . . . potenza, e nello stesso tempo resultino i più grandi possibili, acciocchè, venendo sottratti dal diminuendo, lascino pure il *più piccolo resto possibile*; per la qual condizione, oltre ad un tal resto, rimarrà determinata per mezzo della operazione stessa anche la conveniente grandezza di uno, ed in conseguenza di tutti cotesti diminutori, e quindi ancora il loro numero; ed in questo caso, anche vie più speciale del precedente, la sottrazione prenderà il nome di *Estrazione delle radici*.

Passiamo ora ad esaminare partitamente l'uno dopo l'altro questi tre casi; e vediamo in che cosa propriamente consistano e come si pratichino relativamente a ciascuno di essi le operazioni, che abbiamo ora nominate.

CASO I.

Sottrazione propriamente detta.

3. Come nel Caso I. dell'Addizione (Tema primo, §. II. N.° 2.) ho supposto di sapere addizionare a memoria un numero d'una cifra sola ad un'altro numero d'una o più cifre, così quì, per l'abitudine acquistata nel denumerare ad una unità per volta, io suppongo d'avere imparato a *sottrarre pure a memoria* un numero d'una cifra sola da un altro numero d'una o più cifre, col sapere tutt' ad un tratto proferirne il resto, o la differenza.

Così, per esempio da 25 sottraendo 9, suppongo di sapere, che il resto sia 16; e dirò o scriverò *Da* 25, 9, 16; sebbene fosse meglio dire, o scrivere 25 *meno* 9 *sono* 16.

In questa supposizione abbiasi primieramente un diminutore solo.

Siccome un tal diminutore non può aver più cifre del diminuendo, perchè qnesto dev' essere sempre maggiore, è chiaro che riguardando l' uno e l' altro, a cominciar da destra, come decomposto nelle sue cifre del 1.° 2.° 3.° -- ordine, a sinistra del diminuendo avremo sempre una o più cifre, che nell' insieme si potranno considerare com' esprimenti un numero di unità del medesimo ordine della prima a sinistra del diminutore; e che però

1.° La prima cifra a sinistra d' un tal diminutore potrà sempre sottrarsi, o dalla corrispondente del medesimo ordine del diminuendo, oppure dal numero di unità del medesimo ordine, espresso dall' insieme di lei colle altre sue cifre a sinistra.

2.° Scrivendo a destra del resto, che si ottiene, la cifra seguente del diminuendo, dal numero di unità, che resulta scritto d' un' ordine inferiore al precedente, si potrà sottrarre la seconda cifra del diminutore dell'ordine medesimo.

3.° Scrivendo a destra del secondo resto, che si ottiene, l' altra cifra seguente del diminuendo, dal numero di unità che resulta scritto d' un ordine inferiore al precedente, si potrà sottrarre la terza cifra del diminutore dell'ordine medesimo; e così di seguito sino all' ultima cifra a destra del diminuendo e del diminutore.

L' ultimo resto, che si troverà, sarà quello della sottrazione del diminutore dato dal diminuendo proposto.

Si debba sottrarre per esempio il numero 43 034 dal numero 61 011.

Comincio dallo scrivere il diminutore *sopra* al diminuendo, separato da una linea orizzontale, ma colle cifre adesso tutte tra loro *equidistanti*, ed in modo che quelle del medesimo ordine dell' uno e dell' altro si corrispondano sempre in colonna, come segue

43034

61011
21
1801
17981
17977 resto

Indi eseguisco la operazione nel modo seguente
« Da 6, 4, 2 (Segno 2 e poi 1),
« Da 21, 3, 18 (Segno 18 e poi 0),

« Da 180, 0, 180, (Segno 180 e poi 1),
« Da 1801, 3, 1798, (Segno 1798 e poi 1).
« Da 17981, 4, 17977. (Segno 17977).
E quest' ultimo resto 17977 è il cercato.

Se per un' altro esempio debba sottrarsi il numero 780 978 dal numero 70 320 043, ecco il tipo del calcolo.

780978
70320043
6962
695400
6953914
69539073
69539065 resto.

4. Bisogna confessare per la verità, che questo metodo di sottrarre riesce alquanto imbarazzante, a motivo che noi siamo poco abituati a sottrarre a memoria numeri d' una cifra sola da numeri di molte cifre, per poterne proferir speditamente il resto o la differenza. All' oggetto d' evitare un tale ostacolo vediamo di trovare un qualche compenso, per cui non si abbiano da fare a memoria, che sottrazioni di numeri sempre d' una cifra sola, cioè minori di *dieci*, da numeri di due cifre al più, e questi minori di *venti*.

Per riuscir nell' intento riguardiamo al solito il diminuendo egualmente che il diminutore, come decomposto nelle sue cifre del 1.° 2.° 3.°... ordine, e considerate queste com' esprimenti numeri separati di unità del loro respettivo ordine, si scrivano un pò discoste le une dalle altre, ma però sempre equidistanti tra loro ed in modo che quelle del diminuendo corrispondano sempre in colonna a quelle del diminutore. Quindi riflettendo che una delle unità d' una colonna ne val *dieci* di quelle della colonna immediatamente a destra, si vede, che, quando il bisogno lo richieda, togliendo da una cifra qualunque del diminuendo una unità, ossìa la cifra 1, questa si potrà scrivere a sinistra della cifra che segue a destra, e dal numero minore di *venti*, che ne resulta togliendo parimente la cifra 1, questa si potrà scrivere a sinistra della cifra, che segue a destra; e così di seguito, senza che il diminuendo, decomposto come si è detto, resti alterato.

Con questo compenso potendosi sottrarre ciascuna cifra del diminutore dal corrispondente numero inferiore del diminuendo si avranno tutte le cifre del resto, che si cerca.

Ecco il tipo del calcolo pel primo de'due precedenti esempj.

$$\begin{array}{rrrrr} 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 10 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 7 & 9 & 7 & 7 \end{array} \text{ resto.}$$

5. Ma senza stare a far nel diminuendo decomposizione alcuna, quando la operazione invece da sinistra s' incominci *da destra*, è facil rilevare, che si otterrà ciascuna cifra del resto col sottrarre ciascuna cifra superiore dalla inferiore aumentata di *dieci*, se bisogna, purchè in questo caso si riguardi come diminuita d'una unità la cifra inferiore a sinistra.

Ecco il tipo del calcolo per lo stesso esempio

$$\begin{array}{r} 43034 \\ \hline 61011 \\ 17977 \end{array} \text{ resto}$$

che io eseguisco dicendo.

« Da 11, 4, 7. Da 10, 3, 7. Da 9, 0, 9.
« Da 10, 3, 7. Da 5, 4, 1. »

Non volendo diminuire d' una unità la cifra inferiore a sinistra, si capisce bene che potremo aumentar d' una unità piuttosto la corrispondente superiore. Così si dirà

« Da 11, 4, 7. Da 11, 4, 7, Da 10, 1, 9.
« Da 11, 4, 7. Da 6, 5, 1.

Del resto noi c'eravamo determinati fin da principio a voler cominciar la sottrazione da sinistra, piuttosto chè da destra, sul riflesso, ch'essendo essa una operazione inversa all' Addizione, bisognava cominciar la seconda operazione da dove la prima avea finito.

Che anzi per conformarsi sempre all' uso, il quale qualche volta comanda perfino alla Ragione, nel caso d' un diminutore solo d' ora in avanti noi lo scriveremo non più *sopra*, ma *sotto* al diminuendo immediatamente, separando poi con una linea orizzontale il resto, come segue

$$\begin{array}{r l} 61011 & \\ \underline{43034} & \\ 17977 & \text{resto} \end{array}$$

Ecco i tipi del calcolo di alcuni esempj, ove a sinistra di quei diminutori, che hanno meno cifre de' corrispondenti diminuendi, si sottintendono scritte tante cifre o quante bastano.

7843253	7344200130	9910000110	537101011321578
782241	6383458248	99999999	377212341502799
7061012	960741882	9810000111	159888669818779

6. Passiamo adesso a considerare il caso, in cui si abbiano più diminutori, e questi per ora generalmente disuguali tra loro.

In questo caso addizionandoli tutti, e poi sottraendo la somma dal diminuendo, è chiaro che il resto, che si troverà, sarà il cercato. Così si suole ordinariamente praticare; ma per prepararsi fin da questo momento al Caso II. della Sottrazione di sopra (2) enunciato, noi opereremo nel modo seguente.

« Dopo avere scritti i diminutori al solito
» *sopra* al diminuendo, separato da una linea
» orizzontale, in modo che le cifre tutte del
» medesimo ordine, equidistanti sempre tra
» loro, si corrispondano in colonna.

« 1.° Addizioneremo, *a cominciar sempre da*
» *sinistra*, le cifre della prima colonna de' di-
» minutori, e scrivendo le cifre della somma
» respettivamente sotto le corrispondenti del
» medesimo ordine del diminuendo, da queste
» sottrarremo quelle nel modo, che preceden-
» temente si è detto.

« 2.° Accanto alle cifre del resto, che si ot-
» tiene, abbassando verticalmente a destra la
» cifra superiore del diminuendo, scriveremo
» poi respettivamente sotto a queste le cifre
» corrispondenti della somma della seconda co-
» lonna de' diminutori, per farne la sottrazio-
» ne nel modo stesso.

« 3.° Accanto alle cifre del nuovo resto, che
» si ottiene abbassando verticalmente a destra

» l' altra cifra del diminuendo, scriveremo poi
» respettivamente sotto a queste le cifre cor-
» rispondenti della somma della terza colonna
» de' diminutori per farne la sottrazione sem-
» pre nello stesso modo; e così di seguito.

L' ultimo resto che si troverà sarà il cercato.

Per un' esempio si abbiano per diminutori i quattro numeri 7 345, 8 010, 7 775, 2 011; e per diminuendo il numero 100 000.

Ecco il tipo del calcolo.

$$
\begin{array}{r l}
7345 & \\
8010 & \\
7775 & \\
2011 & \\
\hline
100000 & \\
24 & \\
\hline
760 & \\
10 & \\
\hline
7500 & \\
13 & \\
\hline
74870 & \\
11 & \\
\hline
74859 & \text{resto}
\end{array}
$$

7. Nel caso particolare, in cui i diminutori siano tutti tra loro uguali, la operazione pre-

cedente si semplicizza disponendola, ed eseguendola, come segue.

« Dato il numero de' diminutori, che chiameremo *numero dato*, questo si scriva a
» sinistra del diminuendo, separato con una
» lineetta verticale; e sopra al diminuendo stes-
» so si scriva uno di quei diminutori, separa-
» to anch' esso con una linea orizzontale, in
» modo che le cifre dell' uno e dell' altro del
» medesimo ordine si corrispondano sempre in
» colonna.

« Quindi, a cominciar da sinistra, si molti-
» plichi, come si sà, ciascuna cifra del dimi-
» nutore scritto pel numero dato, e portando
» ciascun prodotto *parziale* sotto il corrispon-
» dente *parzial* diminuendo se ne faccia di ma-
» no in mano la dovuta sottrazione »

L' ultimo resto, che si troverà, sarà il cercato.

Sia per un' esempio 7 054 034 il diminuendo proposto, 234 578 uno de' diminutori uguali, e 7 il loro numero dato.

Ecco il tipo del calcolo

```
      234578
  7 | 7054034
    | 14
     565
      21
     5444
       28
     54160
        35
     541253
         49
     5412044
          56
     5411988   resto.
```

Sia per un' altro esempio 1 976 652 577 il diminuendo proposto, 2 700 345 uno de' diminutori, e 732 il numero dato.

Ecco il tipo del calcolo.

```
          2700345
     ____________
732 | 1976652577
      1464
      ----
       5126
       5124
       ----
          2525
          2196
          ----
           3297
           2928
           ----
            3697
            3660
            ----
              37   resto.
```

8. Sapendosi sottrarre a memoria un numero di due cifre al più da un'altro pure di due cifre, tra i quali la differenza sia d' una cifra sola, la operazione precedente si può compendiar così.

« Nell' atto che si moltiplica una delle ci-
» fre del diminutore per la prima, seconda,
» terza . . . cifra a cominciar da destra del nu-
» mero dato, e così si hanno de' prodotti par-
» ziali di una o due cifre al più,

« 1.° Si sottragga a memoria il primo di que-
» sti prodotti dalla prima cifra a destra del

» parzial diminuendo corrispondente, dopo ave-
» re arbitrariamente aggiunte, se bisogna, al di
» lei numero di unità tante diecine, quante
» bastano e non più per potere effettuare la
» sottrazione; e sotto a lei si scriva la cifra
» del resto.

« 2.° Si sottragga a memoria il secondo par-
» zial prodotto, aumentato però di tante unità,
» quante sono state le diecine aggiunte prece-
» dentemente, dalla seconda cifra del medesi-
» mo parzial diminuendo, dopo aver pure ar-
» bitrariamente aggiunte, se bisogna, anche al
» di lei numero di unità tante diecine, quante
» bastano e non più per potere effettuare que-
» sta seconda sottrazione; e sotto a lei pure si
» scriva la cifra del resto; e così di seguito. »

Le cifre, che avremo scritte, saranno quelle del resto parziale corrispondente, di seguito alle quali si abbasserà verticalmente l' altra cifra del diminuendo totale per avere un diminuendo parziale ulteriore.

Il nostro processo si giustifica subito sul riflesso, che le diecine, le quali si aggiungono di mano in mano a ciascuna cifra di un diminuendo parziale per potere attualmente effettuare la sottrazione di ciascun parzial prodotto fatto, vengono poi tolte via nella successiva sottrazione delle altrettante unità aggiunte al prodotto parziale consecutivo, il quale relativamente al precedente è un prodotto di diecine.

Ecco il tipo del calcolo de' due esempj precedenti

234578	2700345
7 | 7054034	732 | 1976652577
565	5126
5444	2525
54160	3297
541253	3697
5412044	37 resto.
5411988 resto.	

CASO II.

Divisione .

9. Nel secondo di questi esempj i resti ottenuti dopo ciascuna parziale sottrazione del prodotto d' una cifra del diminutore, moltiplicata pel numero dato, dal parzial diminuendo corrispondente, essendo i seguenti.
512, 2, 25, 252, 329, 369, 37,
si vede, ch' essi sono tutti minori del numero dato 732.

Se dunque in cotesto esempio, come in qualunque altro simile, si fosse anticipatamente aumentata qualche cifra del diminutore, restando le medesime tutte le altre, di una o più unità, è chiaro che il di lei prodotto pel numero dato non si sarebbe potuto più sottrarre dal parzial diminuendo corrispondente, e perciò sarebbe stato impossibile l' assegnare alcun resto.

Di quì si conclude generalmente, che quando un diminutore è composto di cifre tali, che i resti successivi delle parziali sottrazioni che si fanno, riescano tutti minori del numero dato, coteste cifre sono le più grandi possibili, che quel diminutore possa avere; e che perciò non vi può essere altro diminutore più grande di lui, il quale ripetuto il medesimo numero di volte possa sottrarsi da un diminuendo proposto, per lasciare alla fine un resto più piccolo.

Proposto pertanto un diminuendo, da cui dovesse sottrarsi un numero dato di diminutori tutti uguali tra loro; nel caso, in cui la grandezza di questi diminutori non fosse assegnata, ma però si esigesse ch' essi dovessero essere i più grandi possibili, acciocchè, venendo sottratti dal diminuendo, lasciassero il più piccolo resto possibile, da quanto abbiamo fin quì detto chiaramente apparisce, che per assegnare cotesta grandezza, ossìa per determinare uno di cotesti diminutori, e contemporaneamente anche il resto, bisognerebbe operare come segue.

« Dopo avere scritto il numero dato, sepa-
» rato da una lineetta verticale, a sinistra del
» diminuendo coperto con una linea orizzontale,
» e prese in questo tante cifre quante bastano,
» e *non più* a contenere il numero dato,

« 1.° Si cercherebbe qual' è quella cifra signi-
» ficativa, la quale moltiplicata pel numero
» dato ci offre un prodotto non superiore e
» nello stesso tempo il più vicino possibile al
» numero espresso dalle cifre prese, considerato
» come primo diminuendo parziale.

» Trovata una tal cifra, e scrittala sopra la
» linea orizzontale in colonna all' ultima di co-
» testo diminuendo, come prima cifra del di-
» minutore che si cerca, il prodotto di essa
» pel numero dato si sottrarrebbe nel modo,
» che precedentemente (8) si è detto, dal me-
» desimo parzial diminuendo.

« 2.° A destra del resto che si trova, mino-
» re del numero dato, abbassando verticalmen-
» te la seguente cifra del diminuendo totale,
» ed ottenuto così un secondo diminuendo par-
» ziale, si cercherebbe qual' è quella cifra si-
» gnificativa o *nò*, la quale moltiplicata pure
» pel numero dato ci offre un prodotto non
» superiore e nello stesso tempo il più vici-
» no possibile a cotesto secondo diminuendo
» parziale.

« Trovata una tal cifra e scrittala a destra
» della precedente sopra la linea orizzontale,
» come seconda cifra del diminutore che si
» cerca, il prodotto di essa pel numero dato si
» sottrarrebbe pure nel modo stesso da quel
» secondo diminuendo parziale.

« E così di seguito fino alla ultima cifra
» del diminuendo totale, la quale si abbas-
» serebbe a destra del resto già ottenuto per
» aver l' ultimo diminuendo parziale, e quin-
» di l' ultima cifra del diminutore cercato ; e
» finalmente l' ultimo resto voluto.

10. Questa operazione, eseguita sul diminuendo totale per mezzo del numero dato, dicesi *Divisione*, in quanto che per essa, prescindendo dall' ultimo resto che si trova, non si fa in sostanza che decomporre, o *dividere* un certo numero proposto in un numero dato di parti uguali, e queste *le più grandi possibili*; quindi è, che relativamente ad una tale operazione il diminuendo, sù cui si opera, prende il nome di *Dividendo*; il numero dato, per mezzo di cui questa operazione si fa, prende il nome di *Divisore*, ed il diminutore, che si ottiene, dicesi *Quoto*, o *Quoziente*, come quello che indica il *quanto* e *non più* esce o si cava dal Dividendo; il *resto* poi ordinariamente mantiene lo stesso nome, se non che qualchè volta, per

denotare che è *il più piccolo possibile*, dicesi *Residuo*.

Apparisce pertanto da ciò che precede, che la Divisione è una operazione più rapida della Sottrazione propriamente detta, ed anche più efficace, in quanto che riferendosi al caso in cui la grandezza de' diminutori, uguali e dati di numero, non è assegnata, fa sì che riescano essi della maggior grandezza possibile, onde venendo sottratti tutti dal diminuendo lo *esauriscano più da vicino* d' un egual numero di altri, lasciando il più piccolo resto possibile.

Del rimanente se si riflette, che il quoziente, una volta che fosse trovato, moltiplicato pel divisore, ci darebbe il medesimo prodotto, che il divisore stesso moltiplicato per lui, ci persuaderemo facilmente che la Divisione, (prescindendo sempre dal Residuo), invece di servire alla ricerca del numero il più grande possibile, contenuto un numero dato di volte in un numero proposto, può egualmente servire alla ricerca del più gran numero di volte possibile, che un numero dato sia contenuto nello stesso proposto numero.

Generalmente, prescindendo dal residuo, la divisione può risolvere la seguente questione.

« *Proposto un numero come prodotto di due fattori, e dato uno di questi fattori, determinar l' altro*;

e sotto questo punto di vista essa sarà una operazione inversa alla Moltiplicazione, per mezzo di cui, dati i due fattori, si determina il loro prodotto.

11. Volendo eseguire la operazione della divisione sopra un numero qualunque, proposto come dividendo, per un' altro numero, dato come divisore, per quello che si è detto (9), è necessario sapere assegnare la cifra del quoziente di ciascun dividendo parziale per lo stesso divisore. Ora possono darsi due casi.

1.° O questo divisore è d'una cifra sola, come il quoziente che si cerca.

2.° Oppure è di più cifre.

Siccome nell' uno e nell' altro caso ciascun dividendo parziale dev' esser compreso tra due de' prodotti consecutivi, datici dalle dieci cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, moltiplicate ciascuna pel divisore dato (quando cotesto dividendo non sia uno di questi stessi prodotti), così è chiaro, che la cifra che si cerca, nel primo caso, (quando non sia la cifra 0), si avrà subito in pronto rammentandoci i prodotti somministrati dalla Tavola di Pittagora, e nel secondo caso tutta la difficoltà si ridurrà a vedere qual' è di coteste dieci cifre quella, che moltiplicata pel divisore dato darà il prodotto immediatamente più piccolo, od almeno non maggiore del dividendo parziale, di cui si tratta.

Volendo poi adottare un linguaggio per la determinazione di ciascuna cifra del quoziente, si dirà o si scriverà per esempio 7 *in* 37 ? 5, con che s' intenderà di dire « 7 *volte in* 37 *qual' è il maggior numero contenuto ?* Il 5; oppure *il numero* 7 *in* 37 *qual' è il maggior numero di volte che sia contenuto ?* 5 *volte*.

Passiamo ora a degli esempj di divisione, incominciando dal caso, in cui il divisore sia d' una cifra sola.

Sia 12 347 891 il dividendo proposto, e 7 il divisore dato

Ecco il tipo del calcolo.

```
      1763984
  7 | 12347891
      53
       44
        27
         68
          59
           31
            3  resto
```

che io eseguisco, come segue

« 7 in 12? 1 (Segno 1 sopra la linea oriz-
« zontale in colonna alla seconda cifra 2 del
« dividendo che è sotto).
« 1 via 7, 7. Da 12, 7, 5. (Segno 5, e abbas-
« so 3). 7 in 53? 7. (Segno 7).
« 7 via 7, 49. Da 53, 49, 4. (Segno 4,
« e abbasso 4). 7 in 44 ? 6. (Segno 6).
« 6 via 7, 42. Da 44, 42, 2. (Segno 2,
« e abbasso 7). 7 in 27 ? 3. (Segno 3).
« 3 via 7, 21. Da 27, 21, 6. (Segno 6,
« e abbasso 8). 7 in 68 ? 9. (Segno 9).
« 7 via 9, 63. Da 68, 63, 5. (Segno 5,
« e abbasso 9). 7 in 59 ? 8. (Segno 8).
« 7 via 8, 56. Da 59, 56, 3. (Segno 3,
« e abbasso 1). 7 in 31 ? 4. (Segno 4).
« 4 via 7, 28. Da 31, 28, 3. (Segno 3). »
e questo è l' ultimo resto voluto.

Per un' altro esempio sia sempre 7 il divisore, e 7 054 034 il dividendo.

Ecco il tipo del calcolo

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1007719 \\
\hline
7 & 7054034 \\
 & 0054 \\
 & \quad 50 \\
 & \quad\; 13 \\
 & \quad\;\; 64 \\
 & \quad\;\;\; 1 \text{ resto}
\end{array}
$$

che io eseguisco più speditamente, come segue

7 in 7 ? 1; 1 via 7, 7. Da 7, 7, 0; 7 in 00? 0; 7 in 005? 0; 7 in 54? 7; 7 via 7, 49. Da 54, 49, 5; 7 in 50 ? 7; 7 via 7, 49. Da 50, 49, 1; 7 in 13? 1; 1 via 7, 7. Da 13, 7, 6; 7 in 64? 9; 7 via 9, 63. Da 64, 63, 1.

12 Del rimanente è visibile, che, siccome appena avvertita nella nostra mente la cifra del quoziente, il di cui prodotto per quella del divisore è il più prossimo *in meno*, come suol dirsi, a ciascun dividendo parziale, s' avverte pure subito la cifra dell' eccesso di questo dividendo su quel prodotto, ossia la cifra del resto, così riunendo mentalmente questa seconda cifra, come di diecine, alla seguente del dividendo totale, come di unità, si avrà subito in mente anche il dividendo parziale successivo, relativamente al quale s' avvertirà la cifra successiva del quoziente totale; e così di seguito.

Senza star dunque a scrivere i successivi parziali dividendi e facendo mentalmente la operazione, come si dice, non si avrà che a scrivere di mano in mano la cifra di ciascun parzial quoziente.

In questa guisa pel primo de' due precedenti esempj il calcolo, di cui ecco il tipo,

$$\begin{array}{r|l} & 1763984 \\ \hline 7 & 12347891 \\ & \qquad\quad 3 \text{ resto} \end{array}$$

si eseguisce dicendo

« 7 in 12? 1. In 53? 7. In 44? 6. In 27? 3.
« In 68? 9. In 59? 8. In 31? 4;
« ed avanza 3.

Pel secondo esempio, di cui ecco il tipo del calcolo,

$$\begin{array}{r|l} & 1007719 \\ \hline 7 & 7054034 \\ & \quad 1 \text{ resto} \end{array}$$

si dice

« 7 in 7? 1. In 00? 0. In 005?, ossìa in 5? 0.
« In 54? 7. In 50? 7. In 13? 1. In 64? 9.
« ed avanza 1.

13. Passiamo adesso al caso, in cui il divisore sìa di più cifre.

In questo caso tutta la difficoltà si riduce, come abbiamo precedentemente detto (11), ad assegnare la cifra del quoziente di ciascun dividendo parziale pel divisore; il processo poi della operazione è presso a poco il medesimo; se non che per compendiare le successive sottrazioni ci atterremo alla Regola di sopra enunciata (8). Vediamone degli esempj. Si debba per un primo esempio dividere il numero 7 803 558 pel numero 27 di due cifre.

Ecco il tipo del calcolo

$$\begin{array}{r|l} & 289020 \\ \hline 27 & 7803558 \\ & 240 \\ & \;\;243 \\ & \;\;\;\;\;55 \\ & \;\;\;\;\;\;\;18 \text{ resto} \end{array}$$

che io eseguisco così.

« 27 in 78? 2; 2 via 7, 14. Da 18, 14, 4.
« (Segno 4, e ritengo 1).
« 2 via 2, 4 e 1, 5. Da 7, 5, 2. (Segno
« 2 e abbasso 0). 27 in 240 ? 8;
« 7 via 8, 56. Da 60, 56, 4. (Segno 4 e
« ritengo 6). 2 via 8, 16 e 6, 22.
« Da 24, 22, 2. (Segno 2 e abbasso 3).
« 27 in 243 ? 9; 7 via 9, 63.
« Da 63, 63, 0. (Ritengo 6), 2 via 9, 18
« e 6, 24. Da 24, 24, 0.
« (Abbasso 5). 27 in 5 ? 0. (Segno 0 e
« abbasso 5). 27 in 55 ? 2; 2 via 7, 14.
« Da 15, 14, 1 (Segno 1 e ritengo 1).
« 2 via 2, 4 e 1, 5. Da 5, 5, 0.
« (Abbasso 8). 27 in 18 ? 0. (Segno 0). »

Ecco il tipo del calcolo di due altri esempj per servir d' esercizio.

```
            2700345
732 | 1976652577
       5126
        2525
         3297
          3697
            37  resto
```

```
                 2310805819
78034 | 180321421301939
         242534
           84322
           628813
            454101
             639319
              150473
               724399
                22093 resto
```

14 Bisogna anche quì pur confessar per la verità, che l' attual determinazione di ciascuna cifra del quoziente riesce un poco imbarazzante e nuoce alla rapidità del calcolo. Ecco come si può rimediare in parte ad un tale ostacolo, e giudicare della giustezza d' una cifra scelta.

Riflettendo, che un dividendo parziale può esser riguardato, come il prodotto del divisore per la cifra che si cerca, e viceversa, *più* o *nò* un resto, bisognerà che cotesta cifra sia tale, che il total prodotto di lei pel divisore non superi il dividendo, e che perciò anche il di lei prodotto parziale per la prima cifra d' un tal divisore non superi la prima, o le due prime cifre del dividendo stesso.

Quindi si conclude, che riguardando un dividendo parziale come un diminuendo, ed il divisore come un diminutore, il quoziente della prima o delle due prime cifre del primo per la prima cifra del secondo sarà la cifra cercata, quando per mezzo di essa considerata come un *numero dato* di diminutori uguali al divisore stesso, possa attualmente effettuarsi la sottrazione di tali diminutori dal diminuendo nel modo di sopra insegnato (7); altrimenti bisognerà diminuirla d'una, di due . . . unità, finchè la sottrazione possa effettuarsi.

Così per esmpio essendo 2 202 un dividendo parziale, e 279 il divisore, siccome il quoziente d'una cifra sola di 22 diviso per 2 è 9, se si fa la sottrazione come segue

$$\begin{array}{r|l} & \underline{279} \\ 9 & 2202 \\ & \;\;40 \end{array}$$

si vede, che non potendosi sottrarre il prodotto 63 di 7 per 9 da 40, la cifra 9 và rigettata, come troppo grande.

Prendendo in suo luogo la cifra 8, e facendo la sottrazione, come segue,

$$\begin{array}{r|l} & \underline{279} \\ 8 & 2202 \\ & \;\;60 \\ & \;\;\;42 \end{array}$$

si vede pure, che la cifra 8 è troppo grande. Dunque la cifra voluta sarà 7.

Questo metodo in pratica riesce molto spedito, giacchè con un pò d'abitudine le operazioni, ch'esige, si fannò quasi a colpo d' occhio.

Eccò, per por fine alla Divisione, il tipo del calcolo di parecchi altri esempj, su' i quali bisogna esercitarsi molto.

	886633
777	688913849
	6731
	5153
	4918
	2564
	2339
	8

	2478
291	721342
	1393
	2294
	2572
	244

	9999
2568	25677875
	25658
	25467
	23555
	443

	8640
8369	72312146
	53601
	33874
	3986

	387
99887	38678267
	871216
	721207
	21998

	99
8247685671	823945687089
	81653976699
	7424805660

	1024
683679	700200031
	1652103
	2847451
	112735

```
              5554444          |          921005
79765 | 443050225666           | 730123 | 672446933616
        442252                 |          1533623
         434272                |             733773
          354475               |             3650616
           354156              |                   1
            350966             |
             319066            |
                  6            |

                 7324213889
79872 | 584999611742208
          258956
           193401
            336571
             170837
              110934
               310622
                710062
                 710860
                  718848
                       0
```

CASO III.

Estrazione delle Radici, e segnatamente della Radice quadrata e cubica.

15. Abbiamo fin quì parlato della Sottrazione in due casi soltanto, cioè nel primo, in cui i diminutori, essendo disuguali ed anche uguali tra loro, sono dati di numero e di grandezza; nel secondo, in cui, dovendo esser tutti uguali tra loro, sono dati di numero e non di

grandezza; oppure, se si vuole, di grandezza e non di numero; ma però nella prima ipotesi si esige, che siano i più grandi possibili; e nella seconda, che sia il più grande possibile il loro numero, acciocchè nell' una, o nell' altra, venendo essi sottratti dal diminuendo, lascino il più piccolo resto possibile.

Resta ora a trattarsi del terzo caso, in cui i diminutori dovendo esser pure uguali, non si assegna nè il loro numero, nè la loro grandezza; ma si esige però che riescano precisamente tanti, quante unità conterrà uno di essi, oppure la di lui seconda, terza,... potenza, e nello stesso tempo resultino i più grandi possibili, acciocchè, venendo tutti sottratti dal diminuendo, lascino pure il più piccolo resto possibile.

In questo caso adunque si vede, che tutto si ridurrà a determinare le successive cifre d' un numero il più grande possibile, di cui il quadrato, o cubo, o quarta,..... potenza possa esser contenuta in un numero proposto. E siccome da questo secondo numero deve ricavarsi, od *estrarsi* il primo incognito, il quale si può riguardare come il *generatore* o la *Radice* della potenza, che si considera, così alla operazione, che si userà, daremo il nome di *Estrazione delle Radici*, le quali si diranno o *quadrate*, o *cubiche*, o *quarte* ,...... secondo che la potenza del più gran numero che si cerca, contenuta nel proposto, si vuole che sia un quadrato o un cubo, o una quarta,... potenza.

Quindi è, che, sebbene la Estrazione delle radici, considerata come un caso particolare della sottrazione, debba avere per scopo la determinazione del resto, o *Residuo*, che si deve avere dopo la sottrazione da un numero proposto *della più gran potenza*, come suol dirsi, in esso contenuta, pure la stessa operazione serve anche egualmente alla determinazione della radice di questa potenza medesima, la quale sottratta dal numero proposto lo *esaurisce più da vicino* d' una potenza del medesimo grado d' una radice diversa; e sotto questo punto di vista la Estrazione delle radici si può riguardare come una operazione inversa alla Elevazione a potenze.

Del resto chiamandosi *potenza perfetta* di un numero una di lui potenza qualunque; quando questa sia la più grande possibile, che entri in un altro numero, noi potremo chiamare questo secondo numero *potenza più che perfetta* del primo, il quale si dirà a vicenda radice *perfetta* od *imperfetta* del medesimo *grado* o *nome* della potenza corrispondente perfetta, o più che perfetta.

16. Volendosi occupare soltanto della estra-

zione delle radici quadrate e cubiche, bisognerà quì ritornare colla nostra mente sul modo di composizione delle cifre d' un quadrato e d'un cubo d'un numero per mezzo di quelle di questo stesso numero, considerato come radice quadrata o cubica. (Tema primo pag. 58, e seg.), giacchè da questo modo soltanto diretto potrà ricavarsi il modo inverso di operare per la decomposizione.

E primieramente, osservando gli esempj (ivi pag. 61, secondo l'avvertenza di pag. 59. 3°) dati del quadrato, è facile rilevare, che, se un quadrato, scritto colle cifre tutte equidistanti tra loro, si spezza, a cominciar da destra, per mezzo di virgole in parti, o *classi*, di due cifre ciascuna (potendo l' ultima classe a sinistra restare anche d' una cifra sola), in retrocedendo poi da sinistra verso destra,

1.° La prima classe conterrà sicuramente il quadrato della prima cifra della radice,

2.° Le due prime classi conterranno sicuramente il quadrato delle due prime cifre della radice,

3.° Le tre prime classi conterranno sicuramente il quadrato delle tre prime cifre della radice; e così di seguito.

Quindi segue, che proposto un numero qualunque, di cui si cerchi la radice quadrata, ossia la radice del più gran quadrato perfetto in esso contenuto, se, a cominciar da destra, si spezza in classi di due cifre ciascuna,

1.° La cifra della radice del più gran quadrato, contenuto nella prima classe a sinistra, sarà la prima cifra della radice, che si cerca;

2.° Le due cifre del più gran quadrato, contenuto nelle due prime classi a sinistra, saranno le due prime cifre della radice che si cerca;

3.° Le tre cifre della radice del più gran quadrato, contenuto nelle tre prime classi a sinistra, saranno le tre prime cifre della radice, che si cerca; e così di seguito.

Si dice, che coteste cifre saranno *precisamente* le successive cifre della radice, che si cerca; perchè, se esse si supponessero più grandi la prima, le due prime, le tre prime,...... classi di cifre del numero proposto non potrebbero più contenere il quadrato respettivo di una, di due, di tre,...... prime cifre della nuova radice; e se si supponessero più piccole, il quadrato della nuova radice, sottratto dal numero proposto, non esaurirebbe questo numero più da vicino, che fosse possibile; ossia non sarebbe il più gran quadrato perfetto in esso contenuto.

Ora chiamandosi *prodotto parziale* di più cifre, *relativamente al loro quadrato*, il prodotto che si fa di tutte coteste cifre per la prima a destra, coll' avvertenza di raddoppiare il prodotto di lei per le altre, che sono alla sua sinistra (Tema primo pag. 59, 61.); ed osservando, che il quadrato di tutte può riguardarsi come la somma del loro prodotto parziale, e del quadrato di quelle, che sono alla sinistra della prima a destra, si conclude,

1.° Che, assegnata la cifra della radice del più gran quadrato contenuto nella prima classe a sinistra del numero proposto, e sottrattone questo quadrato, il resto che si otterrà, dopo avere scritte di seguito a lui le cifre della seconda classe (e che così si chiamerà *resto completato*), bisognerà, che contenga il più gran prodotto parziale, che si possa formare con due cifre, delle quali la prima sia la trovata.

2.° Che, assegnata la seconda di queste cifre, e sottratto il suddetto prodotto parziale d'ambedue dal precedente restc completato, il nuovo resto, che si ottiene, completato anch' esso collo scrivere di seguito a lui le cifre della terza classe, bisognerà, che contenga il più gran prodotto parziale, che si possa formare con tre cifre, delle quali le due prime siano le trovate.

3.° Che, assegnata la terza di queste cifre, e sottratto il prodotto parziale di tutte e tre dall' ultimo resto completato, bisognerà che il nuovo resto completato anch' esso nello stesso modo, contenga il più gran prodotto parziale, che si possa formare con quattro cifre, delle quali le tre prime siano le trovate; e così di seguito.

17. All' oggetto di determinare attualmente coteste cifre l'una dopo l'altra, ossìa di determinarne una qualunque, dopo aver determinate le precedenti a lei, riguardando come un numero di *diecine* quello, che si ottiene nel fare in un prodotto parziale il doppio del prodotto della prima cifra a destra per le altre, che sono alla sua sinistra, è facil concepire, che se da ciascun resto completato, il quale deve contenere il respettivo prodotto parziale, si esclude la prima cifra a destra, il numero che resta espresso dalle altre, essendo di *diecine*, conterrà sicuramente il doppio del prodotto delle cifre trovate della radice per la cifra consecutiva incognita da determinarsi. Dividendo dunque cotesto numero pel numero espresso dalle cifre già trovate della radice, *la metà* del quoziente che si trova, ossìa il quoziente di questo quoziente diviso per 2, diminuito o nò di una, di due,...... unità, e *di una cifra sola*, sarà la cifra, che si cerca, consecutiva a quelle già determinate.

Hò detto *diminuito o nò di una, di due* . .

unità, giacchè per quello, che precede bisogna che il prodotto parziale di tutte coteste cifre non superi il corrispondente resto completato, lo che riscontrando a parte si dice che si *sperimenta* la cifra ultima. Accingendomi io pertanto all' attuale estrazione della radice quadrata di un numero proposto, opero come segue.

« Spezzo il proposto numero, scritto colle sue
« cifre tutte equidistanti tra loro, con virgole
« in classi di due cifre ciascuna da destra verso
« sinistra, e copertolo con una linea orizzon-
« tale, a cominciar da sinistra,

« 1.° Cerco la radice del più gran quadra-
« to, contenuto nella prima classe di una o di
« due cifre; e, trovatala per mezzo della tavo-
« la di Pittagora, la scrivo sopra la linea ti-
« rata, corrispondentemente a cotesta prima
« classe;

« 2.° Sottratto da una tal classe il quadra-
« to della cifra trovata, io completo il resto
« coll' abbassare presso di lui in colonna le due
« cifre della seconda classe, separandone la
« prima a destra con un punto; indi cerco il
« quoziente del numero, che resta, diviso per
« la cifra trovata, e presane la metà, speri-
« mento la cifra, che trovo; dopo di che la
« scrivo sopra la linea tirata corrispondente-
« mente alla seconda classe;

« 3.° Sottratto il prodotto parziale delle due « cifre trovate dal resto primo completato, io « completo il nuovo resto coll' abbassare presso « di lui in colonna le due cifre della terza clas- « se, separandone la prima a destra con un « punto; indi cerco il quoziente del numero, « che resta, diviso per le due cifre trovate; e « presane la metà, sperimento la cifra, che « trovo, come terza cifra della radice; dopo di « che la scrivo sopra la linea tirata corrispon- « dentemente alla terza classe. Seguitando ad « operare nella stessa guisa fino ad aver com- « pletato il penultimo resto coll' avere abbas- « sate presso di lui in colonna le due cifre del- « l' ultima classe, la cifra, che avrò sperimen- « tata, scritta sopra la linea orizzontale cor- « rispondentemente a cotesta classe, sarà l'ul- « tima della radice del numero proposto; ed « il resto seguente sarà quello, che avanza al « più gran quadrato in esso contenuto, ossìa « sarà il *residuo*, che si vuole dopo la sottra- « zione d' un tal quadrato nel presente nostro « Caso III. »

18. Passiamo adesso a degli esempj.

Esempio I.

Estrarre la radice quadrata dal numero 80 345

Ecco il tipo del calcolo

```
    2 8 3
 ──────────
  8,0 3,4 5
  4 0.3
    1 9 4.5
      2 5 6  resto
```

che io eseguisco come segue.

Determinata per mezzo della Tavola di Pitagora la cifra 2, come radice del più gran quadrato 4 contenuto in 8, e scrittala sopra la linea orizzontale corrispondentemente alla prima classe del numero sottoscritto colle sue cifre equidistanti, dico

« 2 via 2, 4. Da 8, 4, 4. (Segno 4 e com-
« pleto con 03).

« 2 in 40 ? 20; la metà ? 10; dunque 9;
« ma è troppo. (Scrivo 8 alla radice).

« 8 via 8, 64. Da 73, 64, 9. (Segno 9, e
« ritengo 7).

» 2 via 8, 16; e 16, 32; e 7, 39. Da 40, 39, 1.
« (Segno 1, e completo).

« 2 in 19 ? cioè 28 in 194 ? 9 è troppo

« egualmente che 8 e 7; prendo 6; la metà? 3. « (Segno 3 alla radice).

« 3 via 3, 9. Da 15, 9, 6. (Segno 6 e « ritengo 1).

« 3 via 8, 24; e 24, 48; e 1, 49. Da 54, 49, 5. » (Segno 5, e ritengo 5)

« 2 via 3, 6; e 6, 12; e 5, 17. Da 19, 17, 2. « (Segno 2).

Dunque finalmente ho 256 per resto, e 283 per radice

Esempio II.

Estrarre la radice quadrata dal numero 76 807 697.

Ecco il tipo del calcolo

```
     8 7 6 4
  ───────────────
  7 6,8 0,7 6,9 7
    1 2 8.0
        1 1 1 7.6
            7 0 0 9.7
                    1   resto
```

che io eseguisco così

Fissata la prima cifra 8 al suo posto, dico

« 8 via 8, 64. Da 76, 64, 12. Poi 8 in 128? « 16; la metà? 8; ma è troppo; dunque 7. « (Segno 7 alla radice). Poi 7 via 7, 49. « Da 50, 49, 1. Poi 7 via 8, 56; e 56, 112;

« e 5, 117. Da 128, 117, 11. Poi 87 in 1117?.
« 12; la metà? 6. (Segno 6 alla radice).
« Poi 6 via 6, 36. Da 36, 36, o. Poi 6 via 7,
« 42; e 42, 84; e 3, 87. Da 87, 87, o. Poi
« 6 via 8, 48; e 48, 96; e 8, 104. Da 111,
« 104, 7. Poi 8 in 70? 8; la metà? 4. (Se-
« gno 4 alla radice). Poi 4 via 4, 16. Da 17,
« 16, 1. Poi 4 via 6, 24; e 24, 48; e 1 49.
« Da 49, 49, o. Poi 4 via 7 28; e 28 56; e 4 60.
« Da 60, 60, o. Poi 4 via 8, 32, e 32, 64;
« e 6, 70. Da 70, 70, o ».

Dunque finalmente ho 1 per resto, e 8 764 per radice.

Per tutto ciò, che abbiamo fin quì visto e fatto, non ci riuscirà difficile il riscontrare per nostro esercizio i seguenti tipi di calcolo di altri sei esempj.

4 1 6 4	3 3 3 3 3	7 5 3 8
17,34,56,73	1 1,1 1,0 8,8 8,8 9	56,82,14,44
13.4	21.1	78.2
535.6	220.8	571.4
4007.3	2198.8	12054.4
6777	19998.9	0
	0	

```
 3  4  0  2  7          7  3  4  8
_______________       _______________
11,57,83,67,29        54,00,00,00
 25.7                  500
    1836.7              710.0
      47632.9            124400
           0               6896
```

```
  2  9  5  9  1  7
____________________
 8,75,67,00,00,00
 47.5
   346.7
     5420.0
       10190.0
         427190.0
           129111
```

19. Passando adesso alla Estrazione delle radici cubiche, se ci rammentiamo del modo di composizione delle cifre d'un cubo per mezzo di quelle della sua radice (Tema primo, esempj di pag. 67, 70, secondo l'avvertenza di pag. 66), è facil rilevare, che spezzando un cubo scritto colle sue cifre equidistanti tra loro, a cominciar da destra, in classi di tre cifre ciascuna (potendo l'ultima classe a sinistra restare di due cifre, ed anche d'una cifra sola), in retrocedendo poi da sinistra verso destra,

1.° La prima classe conterrà sicuramente il cubo della prima cifra della radice,

2.° Le due prime classi conterranno sicuramente il cubo delle due prime cifre della radice, 3.° Le tre prime classi conterranno sicuramente il cubo delle tre prime cifre della radice; e così di seguito.

Quindi segue, che proposto un numero qualunque, di cui si cerchi la radice cubica, ossìa la radice del più gran cubo perfetto in esso contenuto, se, a cominciar da destra, si spezza in classi di tre cifre ciascuna,

1.° La cifra della radice del più gran cubo, contenuto nella prima classe a sinistra, sarà la prima cifra della radice, che si cerca,

2.° Le due cifre della radice del più gran cubo, contenuto nelle due prime classi a sinistra, saranno le due prime cifre della radice, che si cerca,

3.° Le tre cifre della radice del più gran cubo, contenuto nelle tre prime classi a sinistra, saranno le tre prime cifre della radice, che si cerca; e così di seguito.

Si dice, che coteste cifre saranno *precisamente* le successive cifre della radice, che si cerca, perchè, se esse si supponessero più grandi, la prima, le due prime, le tre prime,...... classi di cifre del numero proposto non potrebbero più contenere il cubo respettivo di una, di due, di tre,...... prime cifre della nuova radice; e se si supponessero più piccole, il cubo della nuova radice, sottratto dal numero proposto, non esaurirebbe questo numero più da vicino, che fosse possibile, ossìa non sarebbe il più gran cubo perfetto in esso contenuto.

Ora rammentandoci ciò, che intendiamo per *prodotto parziale* di più cifre *relativamente al loro cubo* (Tema primo, pag. 65), ed osservando, che il cubo di tutte coteste cifre può riguardarsi come la somma del loro prodotto parziale, e del cubo di quelle, che sono alla sinistra della prima a destra, si conclude.

1.° Che, assegnata la cifra della radice del più gran cubo, contenuto nella prima classe a sinistra del numero proposto, e sottrattone questo cubo, il resto, che si otterrà, dopo avere scritte di seguito a lui le cifre della seconda classe (e che così si chiamerà *resto completato*), bisognerà, che contenga il più gran prodotto parziale, che si possa formare con due cifre, delle quali la prima sia la trovata.

2.° Che, assegnata la seconda di queste cifre, e sottratto il prodotto parziale d'ambedue dal precedente resto completato, il nuovo resto che si ottiene, completato anch' esso collo scrivere di seguito a lui le cifre della terza classe, bisognerà che contenga il più gran prodotto parziale, che si possa formare con tre cifre, delle quali le due prime siano le trovate.

3.° Che, assegnata la terza di queste cifre, e sottratto il prodotto parziale di tutte e tre dall' ultimo resto completato, bisognerà che il nuovo resto, completato anch' esso nello stesso modo, contenga il più gran prodotto parziale, che si possa formare con quattro cifre, delle quali le tre prime siano le trovate; e così di seguito.

20. All' oggetto di determinare attualmente coteste cifre l' una dopo l' altra, ossìa di determinarne una qualunque dopo aver determinate le precedenti a lei, se si riscontra, (Tema primo, pag. 65) che il *prodotto parziale* di più cifre relativamente al loro cubo resulta dall'addizione del cubo della prima cifra a destra ch'è di unità semplici, riunito col triplo del prodotto del quadrato di questa cifra per le altre a sinistra, che sono di diecine; ed inoltre del *triplo* del prodotto del quadrato di queste seconde cifre per la prima, il qual triplo prodotto sarà di *centinaja*, è facil concepire, che se da ciascun resto completato, il quale deve contenere il respettivo prodotto parziale, si escludono le due prime cifre a destra, il numero che resta, espresso dalle altre essendo di *centinaja*, conterrà sicuramente il triplo del prodotto del quadrato delle cifre trovate alla radice per la cifra consecutiva incognita da de-

terminarsi. Dividendo dunque cotesto numero pel quadrato del numero espresso dalle cifre già trovate della radice, il *terzo* del quoziente che si trova, ossìa il quoziente di questo quoziente, diviso per 3, diminuito o nò di una, di due,....... unità, e di *una cifra sola*, sarà la cifra che si cerca, consecutiva a quelle già determinate.

Ho detto diminuito o nò *di una, di due*,...... unità, giacchè per quello che precede, bisogna che il prodotto parziale di tutte coteste cifre non superi il corrispondente resto completato; lo che riscontrando a parte si dice, che si *sperimenta* la cifra ultima. Accingendomi io pertanto all' attuale estrazione della radice cubica da un numero proposto, opero come segue.

« Spezzo il proposto numero, scritto colle sue
« cifre tutte equidistanti tra loro, con virgole
« in classi di tre cifre ciascuna da destra ver-
« so sinistra, e copertolo con una linea oriz-
« zontale (ritenendo in mente, che i nove nu-
« meri seguenti

« 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,
« sono i respettivi cubi perfetti delle nove ci-
« fre, o radici 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9),
« a cominciar da destra

« 1.° Cerco fra i suddetti nove numeri il
« massimo contenuto nella prima classe; ed

« avuta la cifra della sua radice, la scrivo
« sopra alla linea tirata, corrispondentemente
« a cotesta prima classe.

« 2.° Sottratto da una tal classe il cubo del-
« la cifra trovata, io completo il resto coll'ab-
« bassare presso di lui in colonna le tre cifre
« della seconda classe, e ne separo le prime due
« a destra con un punto; indi, fatto a parte
« il quadrato della cifra trovata, cerco il quo-
« ziente per questo delle altre cifre a sinistra
« del punto; e prendendo di questo quoziente
« il *terzo*, sperimento la cifra che trovo, come
« seconda cifra della radice, col fare il pro-
« dotto parziale d' ambedue relativo al caso
« presente di cubo (Tema primo, pag. 65);
« dopo di che io scrivo cotesta cifra sopra
« la linea orizzontale corrispondentemente alla
« seconda classe.

« 3.° Sottratto il prodotto parziale delle due
« cifre trovate dal precedente resto completa-
« to, completo da capo il nuovo resto coll' ab-
« bassare presso di lui in colonna le cifre della
« terza classe; e ne separo le due prime a destra
« con un punto; indi, fatto a parte il quadrato
« delle due cifre trovate, cerco il quoziente
« per questo delle altre cifre a sinistra del
« punto e prendendo di questo quoziente il
« *terzo*; sperimento la cifra, che trovo, come

« terza cifra della radice, col fare, come pre-
« cedentemente, il prodotto parziale di tutte
« tre le cifre trovate; dopo di che scrivo co-
« testa cifra sopra la linea orizzontale corri-
« spondentemente alla terza classe. Seguitando
« ad operare nella stessa guisa fino ad aver
« completato il penultimo resto coll' abbassa-
« re presso di lui in colonna le cifre della
« ultima classe, la cifra che avrò sperimentata,
« scritta sopra la linea orizzontale corrispon-
« dentemente a cotesta classe, sarà l' ultima
« delle cifre della radice, che cerco; ed il re-
« sto seguente sarà l' ultimo, che avanza al
« più gran cubo contenuto nel numero pro-
« posto; ossìa sarà il residuo, che si vuole do-
« po la sottrazione d' un tal cubo nel presente
« nostro Caso III.

21. Passiamo a dare un esempio.

Estrarre la radice cubica dal numero 45 270 270 627.

Ecco il tipo del calcolo

3 5 6 4	9	25
45,270,270,627	325	315
182.70	1225	3175
23952.70	4236	
1522546.27	126736	
483 resto		36
		5340
		3204
		373836
		16
		64152
		53460
		32076
		38063536

che io eseguisco, come segue

« Fissata al suo posto la cifra 3, come ra-
« dice del più gran cubo 27 contenuto in 45,
« sottraggo 27 da 45, ed ho per resto 18. Com-
« pleto questo primo resto con 270, ed ho
« 18270. Fatto a parte il quadrato 9 della ci-
« fra 3, divido per questo il numero 182, ed
« avuto 20 per quoziente, il terzo di questo,
« cioè 6, sarebbe troppo; però segno 5 alla
« radice. Fatto a parte il calcolo sopra le due
« cifre 35, come a pagina 67 del Tema pri-
« mo, ed ottenuto il resultato 3175, sottraggo

« il prodotto di questo per la cifra 5, che sarà
« il primo prodotto parziale, da 18270, ed ho
« 2395 per secondo resto. Completo questo se-
« condo resto con 270, ed ho 2395270. Sot-
« to al quadrato 9 della prima cifra 3 della
« radice scrivo il numero 325, come prodotto
« parziale relativo al quadrato delle due cifre
« 35, ed addizionando ho così 1225 pel qua-
« drato di 35. Divido per questo quadrato
« il numero 23952, ed avuto 18 per quo-
« ziente, ne scrivo il terzo 6 come terza ci-
« fra della radice. Indi sulle tre cifre 356 fat-
« to un calcolo simile al precedente sulle due
« 35, ed ottenuto il resultato 373836, sot-
« traggo il prodotto di questo per la cifra 6,
« che è il secondo prodotto parziale, da 2395270,
« ed ho 152254 per terzo resto. Completo
« questo terzo resto con 627, ed ho 152254627;
« Sotto al quadrato 1225 delle due prime ci-
« fre 35 della radice scrivo il numero 4236,
« come prodotto parziale relativo al quadrato
« delle tre cifre 356, ed addizionando ho co-
« sì 126736 pel quadrato di 356. Divido per
« questo quadrato il numero 1522546, ed avu-
« to 12 per quoziente, ne scrivo il terzo 4,
« come quarta cifra della radice; indi sulle
« quattro cifre 3564, fatto a parte un terzo
« calcolo simile ai due precedenti, ed ottenu-

« to il resultato 38063536, sottraggo il pro-
« dotto di questo per 4, ch' è il terzo pro-
« dotto parziale, da 152254627; ed ho 483
« per ultimo resto, dopo che ho ottenuta la
« radice 3 564 del numero proposto nel no-
« stro esempio. »

22. All' oggetto di semplificare le precedenti operazioni, rammentandoci, che il prodotto parziale relativo al cubo d' un numero di più cifre si compone, come segue (Tema primo, pag. 63, 65), cioè

1.° Del cubo della prima cifra a destra di quel numero;

2.° Del triplo prodotto del quadrato di questa cifra per le altre a sinistra;

3.° E del triplo prodotto del quadrato di queste seconde cifre per la prima;

con un pò di riflessione è facile persuadersi, che, se si moltiplica quel numero, o le sue cifre, per la prima cifra a destra, coll' avvertenza di triplicare ciascun prodotto delle altre incominciando dalla seconda, cioè da quella delle diecine, ed il prodotto totale che si ottiene, si aggiunge al triplo del quadrato di coteste altre seconde cifre, la somma che si troverà, moltiplicata per la medesima prima cifra a destra, ci darà pure il medesimo *prodotto parziale*, che si vuole.

Operando in questo secondo modo, siccome si ha già preparato il quadrato di quelle seconde cifre, il calcolo per formare ciascun prodotto parziale successivo riesce più spedito.

Eccone il tipo per l' esempio precedente senza stare a dare dettaglio alcuno

3 5 6 4	9	27
4 5,2 7 0,2 7 0,6 2 7	325	475
1 8 2.7 0	1225	3175
2 3 9 5 2.7 0	4236	
1 5 2 2 5 4 6.2 7	126736	
4 8 3		3675
		6336
		373836
		380208
		42736
		38063536

Ecco i tipi d' un calcolo simile per tre altri esempj, su i quali bisogna esercitarsi molto.

3 7 1 4	9	27
3 1,2 3 0,1 5 8,3 4 4	469	679
2 4 2.3 0	1369	3379
5 7 7 1.5 8	741	
1 6 5 3 4 7 3.4 4	137641	4107
0		1111
		411811
		412923
		44536
		41336836

2 3 0 8	4	12
1 2,3 0 5,4 7 2,0 0 0	129	189
4 3.0 5	52900	1389
1 3 8 4.7 2 0.0 0		
1 1 0 6 9 8 8 8		158700
		55264
		15925264

3 2 0 6 8	9	27
3 2,9 7 7,3 4 0,2 1 8,4 3 2	121	184
5 9.7 7	102400	2884
2 0 9 3 4 0 2.1 8	38436	
2 4 6 7 4 4 0 2 4.3 2	10278436	
0		307200
		57636
		30777636
		30835308
		769504
		3084300304

§. III.

Appendice al primo e secondo Tema d' Aritmetica sulle Prove così dette del Nove *e* dell' Undici *per le operazioni insegnate in questi due Temi.*

1. Quel poco, che nel precedente Tema ed in questo abbiamo insegnato intorno alla Numerazione e Denumerazione, è il fondamento di tutta l' Aritmetica. A queste due operazioni principali, l' una inversa per rapporto all' altra, sempre si ricorre nell'applicazione di questa Scienza, agli usi a' quali essa serve, e che sono innumerabili; però *importa* molto il rendersi famigliari tali operazioni in tutti quei diversi casi, che abbiamo fin quì considerati.

Ma siccome per la insufficienza nostra, e connaturale disattenzione può accadere in ogni operazione, che si commettano degli errori, sarebbe utile e consolante, se dopo averla eseguita, si avesse un qualche riscontro, o *prova*, ch' essa potesse essere stata fatta bene.

Fra tutte le *Prove*, che si potrebbero attualmente proporre, noi non sapremmo indicarne altre più facili e spedite delle due, così dette *del Nove e dell' Undici*, le quali usate congiuntamente potranno servire in ogni caso di *prova* e di *riprova*.

2. All' oggetto di far capire, in che cosa esse consistano, noi noteremo prima alcune proprietà de' due numeri 9 ed 11, considerati separatamente come divisori d' un altro numero qualunque, relativamente al resto, che deve trovarsi dopo la operazione della divisione. Primieramente, rammentandosi che colla divisione non si fa altro che sottrarre dal dividendo il numero più grande, che possa essere in esso contenuto tante volte, quante unità contiene il divisore, per lo che si ha un resto più piccolo di questo divisore stesso, si concepisce bene, che un numero proposto qualunque, considerato come un dividendo, si potrà sempre riguardare come decomposto per addizione in due altri numeri parziali, il primo de' quali sia di-

visibile *esattamente*, cioè senza resto alcuno, per un numero dato, considerato come un divisore, ed il secondo sia più piccolo di questo stesso numero dato. Posto ciò

Essendo proposto un numero scritto, di cui la prima cifra a sinistra sia 1, e tutte le altre cifre siano degli zeri,

1.° Se si divide cotesto numero per 9, siccome, nell' atto che si eseguisce la operazione, si ha costantemente 1 per resto parziale, com' è facile verificare, così il numero proposto potrà riguardarsi come decomposto per addizione in due altri numeri parziali, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 9, ed il secondo sia 1.

2.° Se si divide cotesto numero proposto per 11, siccome, nell' atto che si eseguisce la operazione, si hanno alternativamente i resti parziali 10 e 1, secondo che il numero degli zeri successivamente considerati è dispari, o pari, com' è facile pure il verificare, così il proposto numero potrà riguardarsi come decomposto per addizione in due altri numeri parziali, il primo dei quali sia divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia 10 od 1, secondo chè esso avrà un numero dispari o pari di zeri.

Proposto adesso un secondo numero scritto, di cui la prima cifra a sinistra sia diversa da 1, e tutte le altre cifre siano degli zeri, come nel precedente, siccome esso si può riguardare come la somma di tanti numeri uguali al precedente medesimo, quante unità contiene la sua prima cifra, così è facile persuadersi,

1.° Che questo secondo numero proposto si può pure riguardare come decomposto per addizione in due altri numeri parziali, il primo de' quali sia esattamente divisibile per 9, ed il secondo sia la sua prima cifra a sinistra, considerata come esprimente unità semplici, ossia del prim' ordine.

2.° Che il medesimo secondo numero proposto si può anche riguardare come decomposto per addizione in due altri numeri parziali, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia pure la sua prima cifra a sinistra, seguita o nò dalla cifra 0, secondochè il numero de' suoi zeri è dispari o pari.

Proposto finalmente un terzo numero scritto, di cui le cifre siano qualunque, siccome esso si può riguardare come decomposto per addizione in tanti numeri parziali simili al secondo precedente, quante sono le sue cifre significative, ed espressi da queste medesime cifre, seguite ciascuna respettivamente da tanti zeri, quante cifre essa ha dopo di se, così con un pò di reflessione è facile persuadersi.

1.° Che il terzo numero proposto si può pure riguardare come decomposto per addizione in due altri numeri parziali, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 9, ed il secondo sia la somma delle di lui cifre significative, considerate tutte come esprimenti unità semplici, ossia del primo ordine.

2.° Che il medesimo terzo numero proposto si può anche riguardare come decomposto per addizione in tre altri numeri parziali, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 11; il secondo sia decomponibile ne' numeri espressi dalle di lui cifre significative in posto pari a cominciar da destra, seguite ciascuna separatamente dalla cifra 0; ed il terzo sia decomponibile ne' numeri espressi dalle di lui cifre significative in posto dispari semplicemente.

Così proposto per esempio il numero 443 050 225 666, oltre ad un numero divisibile esattamente per 11, esso si può riguardare come decomposto in due altri numeri, il primo de' quali sia decomponibile ne' numeri 60, 50, 20, 50, 30, 40; ed il secondo sia decomponibile nei numeri 6, 6, 2, 4.

Ora osservando, che due cifre compagne scritte di seguito rappresentano un numero esattamente divisibile per 11, si vede, che, se in luogo della cifra 0, scritta di seguito a ciascuna cifra significativa in posto pari, separata, si scrive questa stessa cifra, il secondo de' precedenti numeri diverrà anch'esso divisibile esattamente per 11. Ma allora il numero proposto s' aumenta d' un' altro numero, che è la somma delle di lui cifre in posto pari a cominciar da destra; dunque, aumentandosi il numero proposto d' un' altro numero, che sia la somma delle sue cifre significative in posto pari a cominciar da destra, il nuovo numero che ne risulta, si potrà riguardar come decomposto per addizione in due altri numeri soltanto, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia la somma delle sue cifre in posto dispari a cominciar sempre da destra.

Ora possono darsi due casi secondo che la prima di queste somme è minore, o maggiore della seconda.

Nel primo caso si vede subito, che, togliendosi contemporaneamente la prima somma e dal nuovo numero e dalla seconda, avremo il numero proposto, che si potrà riguardare come decomposto in due altri numeri, il primo de' quali sia sempre divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia l' eccesso della somma delle sue cifre in posto dispari a cominciar da destra su quella delle sue cifre in posto pari.

Nel secondo caso poi aumentandosi il nuovo numero, e nello stesso tempo anche il secondo de' due, ne' quali esso si può riguardare come decomposto, tante volte di 11, quante bastano, perchè da questo secondo numero così aumentato si possa sottrarre la somma delle cifre del numero proposto in posto pari, si vede, che aumentando il numero proposto di 11 una o più volte soltanto, avremo un secondo nuovo numero, il quale si potrà riguardare come decomposto in due altri numeri, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia l'eccesso della somma delle cifre in posto dispari, del numero proposto, dopo averla però aumentata una o più volte di 11, su quella delle cifre in posto pari a cominciar sempre da destra. Togliendo dunque una o più volte 11, e dal secondo nuovo numero per ridurlo al proposto, e dal primo de' due numeri, ne' quali esso si può riguardare come decomposto, con che si avrà un resto divisibile per 11, si vede anche in questo secondo caso, che il medesimo numero proposto si può riguardare come decomposto in due numeri, il primo de' quali sia sempre divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia l' eccesso della somma, delle sue cifre in posto dispari, *aumentata però di* 11 *una o più volte*, sulla somma delle di lui cifre in posto pari a cominciar sempre da destra. Si conclude dunque definitivamente, che un numero qualunque proposto scritto si può sempre riguardare come decomposto in due altri numeri, il primo de'quali sia esattamente divisibile per 11, ed il secondo sia l' eccesso della somma delle sue cifre in posto dispari, aumentata o nò, una o più volte di 11, sulla somma delle sue cifre in posto pari a cominciar da destra.

Così pel numero proposto precedente 443 050 225 666 avendosi 25 per somma delle sue cifre in posto pari, e 18 per quella delle sue cifre in posto dispari, aumentandosi questa seconda somma di 11 una volta sola, con che essa diventa 29, e togliendosi da 29 la prima somma 25, si ha 4, che è minore di 11, pel secondo de' due numeri, ne' quali si può riguardare come decomposto cotesto numero proposto.

Si può quì avvertire, che siccome nel secondo caso la somma delle cifre del numero proposto in posto dispari si può aumentare di 11, tante volte quante bastano e *non più*, perchè da essa, così aumentata, si possa sottrar quella delle sue cifre in posto pari, così il resto che si trova, sarà sempre minore di 11; e perciò il proposto numero si potrà riguardare come decomposto in due altri numeri, il primo de'quali sia divisibile esattamente per 11, ed il secondo sia minore di 11.

Facendo dunque la ipotesi, che il numero proposto sià tale, che nel primo caso l' eccesso della somma delle sue cifre in posto dispari, a cominciar da destra, sù quella delle cifre in posto pari sia minore di 11, come pure la ipotesi, che la somma di tutte le sue cifre sia minore di 9, da quanto abbiamo fin quì detto è facile concludere

1.° Che il resto della divisione per 9 del numero proposto è la somma delle sue cifre, considerate tutte come esprimenti unità semplici;

2.° Che il resto della divisione per 11 del medesimo numero è l' eccesso della somma delle sue cifre in posto dispari, aumentata o nò di 11 tante volte quante bastano per la sottrazione e non più, sulla somma delle cifre in posto pari, a cominciar da destra, e considerate tutte come esprimenti unità semplici.

Se l' una o l' altra delle precedenti ipotesi non ha luogo, allora, invece del numero proposto, considerandosi il secondo de' due, ne' quali esso si può riguardar come decomposto, e facendosi relativamente a questo le ipotesi stesse, e così di seguito, da quanto abbiamo pure sin quì detto ci pare di poter generalmente concludere

1.° Che in un proposto numero la somma

delle sue cifre, oppure la somma di quelle di una tal somma, e così di seguito, finchè si abbia per ultima somma un numero minor di 9, sarà il resto della divisione per 9 del numero proposto;

2.° Che in un proposto numero l' eccesso della somma delle sue cifre in posto dispari a cominciar da destra, aumentata o nò, una o più volte di 11, su quella delle cifre in posto pari, oppure in questo eccesso l' eccesso della somma delle cifre in posto dispari a cominciar da destra, aumentata o nò, una o più volte di 11, sù quella delle cifre in posto pari, e così di seguito, finchè si abbia per ultimo eccesso un numero minore di 11, sarà il resto della divisione per 11 del numero proposto.

Quindi è, che per ottenere il resto della divisione per 9, o per 11 d'un numero proposto si propone la seguente regola.

« 1.ª Addizionando tutte le cifre del numero
« proposto rigettate il numero 9 di mano in
« mano che avrete per somma un numero ugua-
« le o maggiore; il resto sarà quello della di-
« visione per 9.

« 2.ª Addizionando a cominciar da destra le
« cifre in posto dispari a parte, e quelle in
« posto pari a parte, rigettate il numero 11 di
« mano in mano che avrete per somma un

« numero uguale o maggiore; l'eccesso del pri-
« mo resto, aumentato o nò di 11, sul secon-
« do sarà quello della divisione per 11.

Così pel resto della divisione per 9 del numero 443 050 225 666 di sopra proposto avrete 7, ed avrete 4 pel resto della divisione per 11.

3. Passiamo adesso a vedere, come le proprietà, che abbiamo scoperte de' due divisori 9 ed 11 d' un numero proposto, considerato come un dividendo, relativamente ai resti più piccoli di cotesti divisori, e che noi chiameremo *resti definitivi*, possono servire alla verificazione delle operazioni, che abbiamo nei due precedenti Temi insegnate.

Incominciando dalle *Operazioni dirette*, e segnatamente dall' Addizione, siccome un numero qualunque può riguardarsi, come decomposto per addizione in due altri numeri, il primo de' quali sia divisibile esattamente per 9, o per 11, ed il secondo sia il suo resto definitivo, è chiaro, che il resto definitivo d' un numero, che sia la somma di due o più altri numeri, dev' essere lo stesso del resto definitivo della somma de' resti definitivi parziali di cotesti numeri. Quindi si conclude

1.° Che, se la somma di due o più numeri è stata fatta bene, bisogna, che il resto definitivo di lei sia lo stesso del resto definitivo della somma de' resti definitivi parziali di cotesti numeri. Perciò per la verificazione dell' Addizione si propone la seguente regola.

« Cercate il resto definitivo della somma « avuta. Poi cercate i resti definitivi di tutti i « numeri addizionati, e fate la somma di que- « sti secondi resti. Se la operazione è stata « fatta bene, il resto definitivo di questa se- « conda somma sarà lo stesso di quello della « prima, che vuolsi verificare ».

Nel caso particolare, in cui i numeri addizionati siano tutti uguali tra loro, siccome la loro somma è il prodotto di uno di essi pel loro numero, e la somma de' loro resti, che sono pure tutti uguali tra loro, è il prodotto d' uno di questi resti per lo stesso numero, così il resto del primo prodotto, che è un prodotto di due fattori, dovrà essere lo stesso del resto del secondo prodotto, che è quello di un fattore pel resto dell'altro; e quindi lo stesso del resto del prodotto de' resti di cotesti due fattori. Perciò si conclude

2.° Che, se il prodotto di due numeri, o fattori, è stato fatto bene, bisogna, che il resto definitivo di lui sia lo stesso del resto definitivo del prodotto de' resti definitivi parziali de' suoi fattori.

Prendendo in luogo d' uno de' due numeri, o fattori, un prodotto di mano in mano di due, di tre,..... altri fattori, si concluderebbe nello stesso modo, che, se il prodotto di più di due fattori è stato fatto bene, bisogna che il resto definitivo d' un tal prodotto sia lo stesso del resto definitivo del prodotto de' resti definitivi parziali di tutti cotesti fattori. Perciò per la verificazione della moltiplicazione si propone la seguente regola.

« Cercate il resto definitivo del prodotto avu-
« to. Poi cercate i resti definitivi di tutti i
« fattori, e fate il prodotto di questi resti. Se
« la operazione è stata fatta bene, il resto de-
« finitivo di questo secondo prodotto sarà lo
« stesso di quello del primo, che vuolsi veri-
« ficare ».

3.° Nel caso particolare, in cui i fattori d'un prodotto siano tutti uguali tra loro, siccome un tal prodotto non è, che una certa potenza di uno di essi, ed il prodotto de' resti de' fattori, che sono pure tutti uguali tra loro, non è che una potenza del medesimo grado d' uno di questi resti, così per la verificazione della Elevazione a potenze d' un numero si propone la seguente regola

« Cercate il resto definitivo della potenza
« avuta. Poi cercate il resto definitivo di cote-

« sto numero e fate d'un tal resto la potenza del
« medesimo grado. Se la operazione è stata fatta
« bene, il resto definitivo di questa seconda
« potenza sarà lo stesso di quello della prima,
« che vuolsi verificare ».

4. Passando alle *Operazioni inverse*, e segnatamente alla Sottrazione, siccome un Diminuendo si può riguardare come resultante dall' Addizione de' Diminutori al Resto, che si trova dopo la sottrazione, così per quello che precede si conclude

1.° Che, se la sottrazione di uno o più Diminutori da un Diminuendo proposto è stata fatta bene, bisogna, che il resto definitivo di lui sia lo stesso del resto definitivo della somma resultante dall' Addizione de' resti definitivi parziali de' Diminutori al resto definitivo del Resto della operazione. Perciò per la verificazione della Sottrazione si propone la seguente regola:

« Cercate il resto definitivo del resto della
« operazione, ed i resti definitivi de' diminu-
« tori, e fate la somma di tutti. Poi cercate
« il resto definitivo di questa somma, e quello
« del diminuendo. Se la operazione è stata
« fatta bene, questi due ultimi resti saranno
« tra loro uguali ».

Nel caso particolare, in cui più diminutori siano tutti uguali tra loro ed i più grandi possibili, il diminuendo si può considerare come un Dividendo, uno de' diminutori come il Quoziente, ed il loro numero come il Divisore; di modo che il Dividendo stesso resulterà dall'addizione del prodotto del Quoziente pel Divisore al Residuo della operazione della divisione. Quindi si conclude;

2.° Che, se una Divisione è stata fatta bene, bisogna che il resto definitivo del Dividendo sia lo stesso di quello della somma del prodotto del Quoziente pel Divisore, e del Residuo della Operazione. Perciò per la verificazione della divisione si propone la seguente regola

« Cercate il resto definitivo del Dividendo.
« Poi cercate i due resti definitivi del Divisore
« e del Quoziente, ed il resto definitivo del
« Residuo della operazione. Al resto definitivo
« del prodotto di questi primi due resti ag-
« giungete il terzo. Se la operazione è stata
« fatta bene, il resto definitivo della somma,
« che avrete, sarà lo stesso del primo resto del
« Dividendo ».

Nel caso anche vie più speciale, in cui i Diminutori uguali essendo i più grandi possibili, il loro numero sia precisamente uguale ad uno di essi, oppure alla di lui seconda, terza,...... potenza, il Diminuendo si può considerare come un numero proposto, di cui uno di cotesti diminutori sia la radice respettivamente quadrata, cubica, quarta,..... di modo che cotesto proposto numero resulterà dall' addizione del quadrato, cubo, quarta,..... potenza della sua respettiva radice al Residuo della operazione in una Estrazione di Radici. Quindi si conclude

3.° Che, se una Estrazione di Radice è stata fatta bene, bisogna che il resto definitivo del numero proposto sia lo stesso di quello della somma della potenza perfetta corrispondente della radice estratta, e del Residuo della operazione. Perciò per la verificazione della Estrazione delle radici quadrate e cubiche si propone la seguente regola.

« Cercate il resto definitivo del numero pro-
« posto. Poi cercate il resto definitivo della
« Radice estratta quadrata, o cubica, e quello
« del Residuo della operazione. Fate il quadra-
« to, o cubo del primo di questi due resti, ed
« aggiungete un tal quadrato o cubo al secondo
« resto. Se la operazione è stata fatta bene, il
« resto definitivo della somma che avrete, sarà
« lo stesso del primo del numero proposto ».

Passiamo a degli esempj.

1°. Essendosi in addietro trovato, che il quoziente del numero 443 050 225 666 diviso per 79 765 è 5 554 444, e che il residuo è 6, siccome il resto definitivo per 9 del dividendo è 7, quello del divisore è parimente 7, del quoziente è 4 e del residuo è 6, così il resto definitivo per 9 del prodotto 28 di 4 per 7, ossia 1, aggiunto a 6 dandoci 7 per somma, si ha una prova che la operazione possa essere stata fatta bene.

Per averne anche una riprova si osservi, che, siccome il resto definitivo per 11 del dividendo è 4, come pure 4 è del divisore, 5 del quoziente e 6 del residuo, così il resto definitivo per 11 del prodotto 20 di 4 per 5 sarà 9, e però, aggiungendo 6 a 9, il resto definitivo per 11 della somma 15 è 4, come quello del dividendo.

2.° Essendosi pure trovato, che 7 348 è la radice quadrata del numero 54 000 000, col residuo 6 896, siccome il resto definitivo per 11 del numero proposto è 10, quello della radice è 0, e quello del residuo è pure 10, si ha una prova che la operazione possa essere stata fatta bene.

3.° Essendosi parimente trovato, che la radice cubica del numero 51 230 158 344 è 3 714 senza alcun residuo, siccome il resto definitivo per 9 di questa radice è 6, e quindi quello del di lei cubo 216 è 0, come lo è pur quello del numero proposto, così si ha una prova che la operazione possa essere stata fatta bene.

Non staremo quì a dare altri esempj rilasciando ad altri la cura di verificare le operazioni, che abbiamo in addietro fatte.

5. Del rimanente noi siamo ben lungi dall' asserire, che la nostra Prova del *Nove* o dell' *Undici*, di cui abbiamo fin quì parlato, *basti* per la sicurezza de' calcoli. Noi diciamo soltanto, ch'essa è *necessaria*, vale a dire, che, se cotesti calcoli sono stati fatti bene, essa deve essere soddisfatta; ma reciprocamente, se essa è soddisfatta, noi non intendiamo di dire, che i nostri calcoli siano stati fatti bene; perchè vi possono essere delle cifre cambiate di posto, oppure errate in modo, che nella operazione dell' una o dell' altra *Prova* gli errori commesssi nella Operazione, che vuolsi verificare, si compensino tra loro; e quindi tali errori rimangano a noi nascosti.

PREZZO

Una Lira.